Математика 11. клас (6 април – 10 април)

Изразяване на тригонометрични функции на даден ъгъл чрез тригонометрични функции на удвоения му ъгъл

Да докажем следната теорема:

Теорема 1.

Ако $\propto$ е произволен ъгъл, в сила са формулите

(5) $$\sin \propto = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\propto}{2}}$$

(6) $$\cos \propto = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\propto}{2}}$$

Доказателство:

Като съберем и извадим почленно тъждествата

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

$$\cos^2 \propto - \sin^2 \propto = \cos 2 \propto,$$

получаваме

$$2\cos^2 \propto = 1 + \cos 2 \propto$$

$$2\sin^2 \propto = 1 - \cos 2 \propto$$

Тези равенства можем да запишем във вида:

(7) $$\sin^2 \propto = \frac{1-\cos 2\propto}{2}$$

(8) $$\cos^2 \propto = \frac{1+\cos 2\propto}{2}$$

Те се наричат **формули за понижаване на степента**.

Забележка: Формулите (7) и (8) следват и от равенствата (2’) и (2”) от предния урок, като синус и косинус от $\frac{\propto}{2}$ се изразяват чрез косинуса на удвоения ъгъл $\propto$.

От тях непосредствено получаваме

$$\sin \propto = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\propto}{2}} \text{ и } \cos \propto = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\propto}{2}},$$

С формулите (5) и (6) се изразяват синус и косинус от $\propto$ чрез косинуса на удвоения ъгъл. Знаците „+“ и „–” пред радикалите в тези формули се избират в зависимост от това в кой квадрант е второто рамо на ъгъл $\propto$. Ако например $\propto \in (90°; 180°)$, във формула (5) трябва да се избере знак плюс, а във формула (6) – знак минус, защото синусът на ъгли, чието второ рамо е във втори квадрант, е положителен, а косинусът – отрицателен.

От тези две формули получаваме:

(9) $$tg \propto = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\propto}{1+\cos 2\propto}},\ \propto \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \frac{1}{2}$$

(10) $$\text{cotg} \propto = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\propto}{1-\cos 2\propto}},\ \propto \neq k\pi$$

Пример:
Ако $\propto = 22°30'$, да се пресметнат $\sin \propto$, $\cos \propto$ и $tg \propto$.

Решение:
Според формула (5)

$$\sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Пред радикала вземаме знак „+“, защото $\sin 22°30' > 0$.

От формула (6) аналогично намираме $\cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, а като разделим получените две стойности или чрез използване на формула (9), за $tg\ 22°30'$ намираме

$$tg\ 22°30' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Задачи за самостоятелна работа

Задача 1.

$tg \propto = \frac{\sin 2\propto}{1+\cos 2\propto}$ $(\propto \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$

Задача 2.

Да се опрости израза $A = \sqrt{\frac{1-\cos 4\propto}{2}} + \sin 2 \propto$, ако

а) $0 \leq \propto \leq \frac{\pi}{2}$ б) $\frac{\pi}{2} \leq \propto \leq \pi$

Задача 3.
Опростете израза:

а) $1 - 2\sin^2\propto + \cos 2\propto$ б) $\frac{2\ tg\ 15°}{1-tg^2 15°}$

в) $(\cos^2\propto + 2 \sin\propto \cos\propto - \sin^2\propto)^2$ г) $\cos 4\propto + 2 \sin^2 2\propto$

След като решите задачите ги снимайте и ги изпратете на имейл на преподавателя си:

За 11 ^{а} клас: **zlatina_hristova59@abv.bg**
За 11 ^{б} клас: **marinova.sukim@gmail.com**
За 11 ^{в} клас: **mihneva_2020@abv.bg**
За 11 ^{г} клас: **ginka.0907@abv.bg**
Часовете по математика ще се провеждат както следва:
За **11** ^{а} клас: по учебна програма в **MS Teams**
За **11** ^{б} клас: в **MS Teams** в понеделник от 13:00 часа

Връзка към екипа:
https://teams.microsoft.com/l/team/19%3a58ae7e13779d482887774eca04c7569c%40thread.tacv2/conversations?groupId=33ed32e7-c67d-49b6-a5d7-53668697067c&tenantId=420584ab-4eec-41c7-bb43-7364d0a6fdfd
Код за присъединяване: 88bg4xe

За **11** ^{в} клас: по учебна програма в **MS Teams**

За **11** ^{г} клас: по учебна програма в **Zoom** – кодът се дава преди часа от преподавателя